The geometry of three-dimensional Seiberg-Witten theory

著者	山瀬 尊久
内容記述	Thesis (Ph. D. in Science)--University of Tsukuba, (A), no. 4222, 2007.3.23 Includes bibliographical references
発行年	2007
URL	http://hdl.handle.net/2241/90888

氏　名（本籍）	山瀬尊久（神奈川県）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	博甲第 4222 号
学位授与年月日	平成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	**The geometry of three-dimensional Seiberg-Witten theory** （3 次元サイバーグ・ウィッテン理論の幾何学）

主　査	筑波大学教授	理学博士	伊藤光弘
副　査	筑波大学教授	理学博士	山口孝男
副　査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男
副　査	筑波大学教授	理学博士	磯崎　洋

論文の内容の要旨

4 次元 Yang-Mills インスタントン理論および 3 次元 Floer ホモロジー理論が 80 年代から物理，幾何学，トポロジーの交絡する分野として顕著な発展をとげた。これらは非可換 SU(2) ゲージ理論である。発展が一段落したあとを引き継ぐかたちで，可換ゲージ場である 4 次元 Seiberg-Witten 理論が数学に登場した。Seiberg-Witten 理論は U(1) をゲージ群とするゲージ理論ゆえに取り扱いが SU(2) ゲージ理論に比べて格段に容易になり 4 次元微分トポロジーや 2 次元複素多様体論での従来の理論に大きな変革を促すほどの成果をあげた。4 次元 Seiberg-Witten 理論に即発され，3 次元 Seiberg-Witten 理論が研究対象になったのは，ほぼ同時期であった。

Seiberg-Witten 方程式は二つの非線形方程式，スピノール場に関する Dirac 方程式，複素行列直線束 L の接続に関する曲率方程式である。方程式の解のなす空間，すなわちモジュライ空間から定まる幾何学的量が，所与の Riemann 計量によらない量であり，したがって，微分位相的不変量を与える。Taubes による Seiberg-Witten 理論の 4 次元 symplectic 多様体への本質的応用や，Kronheimer と Mrowka による複素曲面に関する Thom 予想の完全解決が記憶に新しい。

さて山瀬尊久氏の本論文で著された研究は，3 次元多様体上の Seiberg-Witten 理論の微分幾何学的研究といえよう。

論文の構成は 3 部に分かれ，第 1，2 章は 3 次元 Seiberg-Witten 理論の概説およびある幾何等式をみたす 3 次元多様体の幾何的特長づけ，第 3 章ではこの 3 次元多様体上での 3 次元 Seiberg-Witten 理論の展開，最終章は Seiberg-Witten-Floer ホモロジー論をこの多様体上で論述することに充てられる。

Thom 予想を解決に導いた手法を 3 次元の場合にも適用して，Kronheimer と Mrowka は 3 次元閉多様体上に定義される双対 Thurston ノルムを，モノポール類について，2 乗積分ノルムで表現される微分幾何学的量の上限値（これは常に 1 以下の値をとる）として特徴づけることに成功した。彼らの議論は 3 次元 Seiberg-Witten 方程式が解を持ったとしてこの結論を得ている。山瀬氏の研究動機は，そこで，この上限値をとる Riemann 計量を特徴づける 3 次元多様体は何かというものである。彼は，この幾何等式をみたす 3 次元閉多様体 M は，実際，Thurston 幾何化予想に現れる 8 個の幾何モデルの一つであるところの数直線と

双曲平面の直積空間をその普遍被覆空間にもつものという特徴付けに成功した。

このような特徴づけをもった3次元閉多様体上での3次元 Seiberg-Witten 理論の展開が第3章でなされている。行列直線束Lの同定，モノポール類の存在，自然に与えられる平行スピノール場による Seiberg-Witten 方程式の解の存在証明定理，Seiberg-Witten 不変量が符号を無視すれば1であることなどを議論の積み重ねによって得ている。

第4章では一般3次元閉多様体上で従来議論された Seiberg-Witten-Floer ホモロジー論を，一貫して考察の対象としてきたこの3次元多様体Mに対して適用した。Seiberg-Witten-Floer ホモロジー論は，有限次元多様体上の Morse 関数理論の無限次元版としての位置づけをもち，Morse 関数に相当する Chern-Simons-Dirac 汎関数のゲージ多価性により，フルゲージ変換群より小さいゲージ変換部分群を考察する必要が生じる。相対 Morse 指数に関するスペクトルフローの取り扱いがホモロジー理論には不可欠である。ここで円周と Riemann 面の直積多様体Mに対してスペクトルフロー値が計算でき，Seiberg-Witten-Floer ホモロジーが完全に決定されている。

審査の結果の要旨

3次元 Seiberg-Witten 理論の研究は世界的に見渡しても Kronheimer，Mrowka の研究，Auckly による彼らの研究の継承など数例に過ぎない。さらには Seiberg-Witten 理論の微分幾何学的側面に焦点をあてた研究としては，4次元における LeBrun らの研究が挙げられるにとどまる。山瀬氏の研究は3次元多様体を Seiberg-Witten 理論の枠組みで微分幾何学的に捉えた研究のさきがけといえる。論文は大きく次の3部からなる：(1) ある種の幾何等式をみたす3次元多様体の特徴づけ，(2) 数直線と双曲平面の直積空間を普遍被覆空間にもつ3次元多様体のうえでの Seiberg-Witten 理論の展開，(3) Seiberg-Witten-Floer ホモロジーの決定，である。山瀬氏の研究は，Kronheimer，Mrowka や Auckly の研究をさらに深めたものとして国際的に高く評価される研究といえる。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。